УДК 004.001.57:519.2 **DOI: 10.18413/2518-1092-2016-1-3-10-15**

Сидоренко И.А.[1]
Будникова М.А.[2]

МОДЕЛИРОВАНИЕ N-МЕРНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ КОСИНУСА РАЗНОСТИ ФАЗ

1) доцент кафедры информационных систем и технологий, кандидат технических наук, доцент Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы д.85, г. Белгород, 308015, Россия. *e-mail: sidorenko@bsu.edu.ru*
2) студентка кафедры информационных систем и технологий. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы д.85, г. Белгород, 308015, Россия
e-mail: 775939@bsu.edu.ru

Аннотация
В статье предложена модель, позволяющая исследовать многомерную плотность распределения вероятности для случайных величин, представляющих собой косинус разности фаз, имеющих равномерное случайное распределение. Приведены результаты моделирования в виде гистограмм экспериментальных данных. С помощью разработанной модели получены аппроксимирующие формулы для n-мерной плотности вероятности косинуса разности фаз для $n \leq 5$. Результаты проведенного исследования могут быть актуальны при оценке эффективности приема сигналов со случайными параметрами.
Ключевые слова: компьютерное моделирование, многомерная плотность вероятности, некогерентный прием, интерполяция.

UDC 004.001.57:519.2

Sidorenko I.A.[1]
Budnikova M.A.[2]

MODELING N-DIMENSIONAL PROBABILITY DENSITY OF THE COSINE OF PHASE DIFFERENCE

1) Candidate of Technical Sciences, Associate Professor Department of Information and Telecommunication Systems and Technologies, Belgorod State National Research University, 85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia
e-mail: sidorenko@bsu.edu.ru
2) Student. Department of Information and Telecommunication Systems and Technologies Belgorod State National Research University, 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia
e-mail: 775939@bsu.edu.ru

Abstract
The article proposes a model that allows to explore a multivariate probability density for random variables representing the cosine of phase difference with uniform distribution. The study demonstrates the results of modeling as a histogram of the experimental data. The developed model allowed getting approximate formulas for the n-dimensional probability density of the cosine of the phase difference for $n \leq 5$. The results of this study may be relevant when assessing the effectiveness of signal reception with random parameters.
Keywords: computer modeling; multivariate probability density; incoherent reception; interpolation.

Введение

Передача информации по каналам связи, радиолокация, радионавигация, физические эксперименты и т.д. связаны с проблемой измерения и определения параметров сигналов, несущих информацию об исследуемом объекте. Информация может быть заключена в амплитуде сигнала, частоте, фазе, времени задержки и т.д. Во всех этих случаях необходимо определить с некоторой погрешностью истинное значение измеряемого параметра. Тем более что сигнал, несущий информацию, подвержен воздействию помех и искажений, возникающих, например, в случае многолучевого распространения сигнала. Поэтому алгоритмы, по которым обрабатываются сигналы, должны учитывать случайный характер этих сигналов. В связи с этим была развита математическая теория обработки сигналов, основанная на теории вероятностей, теории случайных процессов и математической статистики.

Во многих задачах статистической радиотехники осуществляется прием сигналов, представляющих собой сумму независимых случайных величин. Например, при некогерентном поэлементном приеме с накоплением, выполняется сложение n элементов сигнала со случайными фазами при постоянной или случайной амплитуде [2]. При этом каждый элемент сигнала представляет собой фрагмент гармонического колебания со случайной начальной фазой, имеющей равномерное распределение на интервале ($0\div2\pi$). Амплитуда суммы n элементов сигнала представляет собой случайную величину, зависящую от значений фаз каждого из n суммируемых фрагментов гармонического колебания. Известно [4, 7], что амплитуда суммы двух элементов сигнала с постоянной амплитудой полностью описывается плотностью распределения случайной величины $\theta=cos(\varphi_1-\varphi_2)=cos(\Delta\varphi)$, представляющей собой косинус разности фаз двух суммируемых колебаний.

$$w(\theta)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\theta^2}}. \quad (1)$$

В случае суммирования $n\geq3$ элементов сигнала необходимо иметь соответственно n-мерную плотность вероятности косинуса разности фаз. В теории вероятностей отсутствует формула n-мерной плотности распределения случайных величин, представляющих собой косинус разности фаз, имеющих равномерное случайное распределение. Тем не менее, потребность в такой формуле возникает всякий раз, когда необходимо выполнить операцию усреднения по случайной величине θ. Указанные обстоятельства определяют актуальность темы исследований, изложенных в данной статье.

Для нахождения формул n-мерной плотности распределения косинуса разности фаз можно использовать [1, 3] либо метод характеристических функций с последующим решением численными методами, либо статистическое моделирование с аппроксимацией экспериментальных данных в виде какой-либо функции. При этом следует иметь в виду, что при n>>1 плотность вероятностей $w_n(\theta)$ должна стремиться к нормальному закону распределения, а при малых значениях n закон распределения будет сильно видоизменяться. Именно поэтому в данной статье приводятся результаты исследований n-мерной плотности вероятности косинуса разности фаз для $n\leq5$, а затем производится оценка нормализации совместного распределения для n случайных величин при n>>1.

Основная часть

Целью статьи является исследование n-мерной плотности распределения вероятностей косинуса разности фаз для малых и больших значений параметра n методом статистического моделирования.

Постановка задачи

При некогерентных методах передачи сигналов по каналам радиосвязи фаза принимаемого сигнала обычно является случайной величиной, принимающей значения в пределах от 0 до 2π. Пусть фаза сигнала – случайная величина φ, которая распределена равномерно на интервале $[0, 2\pi]$. В этом случае [4], закон распределения φ описывается простым выражением $f(\varphi)=1/2\pi$ при $0\leq\varphi\leq2\pi$. Требуется исследовать вероятностные характеристики некогерентного приёма радиосигнала с накоплением n элементов на основе статистического моделирования.

Для исследования n-мерной плотности распределения вероятностей косинуса разности фаз требуется создать модель, генерирующую заданное множество n случайных величин $\theta=cos(\varphi)$, где случайная величина φ, которая распределена равномерно на интервале $[0, 2\pi]$. Программа должна включать в себе генератор случайных чисел φ, распределенных по равномерному закону в интервале $[0, 2\pi]$, тригонометрическую функцию вычисления $cos(\varphi)$, накопитель суммы n значений и повтор эксперимента со сбором статистики. Для проведения исследований была использована прикладная программа MATLAB®, с помощью которой реализован алгоритм разработанной модели и визуализация результатов моделирования.

Структурная схема разработанной модели изображена на рис. 1.

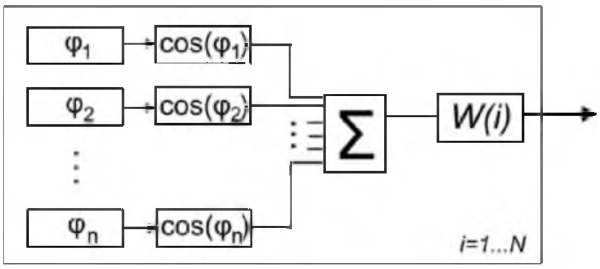


Рис. 1. Статистическая модель
Fig. 1. Statistical model

Переменными в модели являются два параметра: n – число слагаемых суммы, и N – количество опытов в эксперименте. Результат выводится в виде гистограмм, характеризующих статистику полученных значений случайной величины и её закон распределения.

Цель исследований, проводимых на данной модели, – получить законы распределения для заданных значений n и найти приближение теоретической функции распределения, построенное с помощью выборки из него. Количество опытов принято $N=100000$, и это значение использовано для всех экспериментов на данной модели.

Для нахождения выражения, описывающего эмпирические данные, было принято решение использовать интерполяционные полиномы, и производить соответствующие вычисления в программной среде MATLAB®.

Результаты вычислительных экспериментов

В ходе моделирования получены законы совместного распределения n случайных величин для $n \leq 5$. На рис. 2, *а,б,в,г* представлены результаты моделирования в виде гистограмм при $n=2, 3, 4, 5$ соответственно.

Сопоставление гистограмм показывает существенное различие законов распределения случайной величины θ_n для различных значений n. При этом очевидно, что уже при $n=5$ наблюдается нормализация закона распределения случайной величины θ_n.

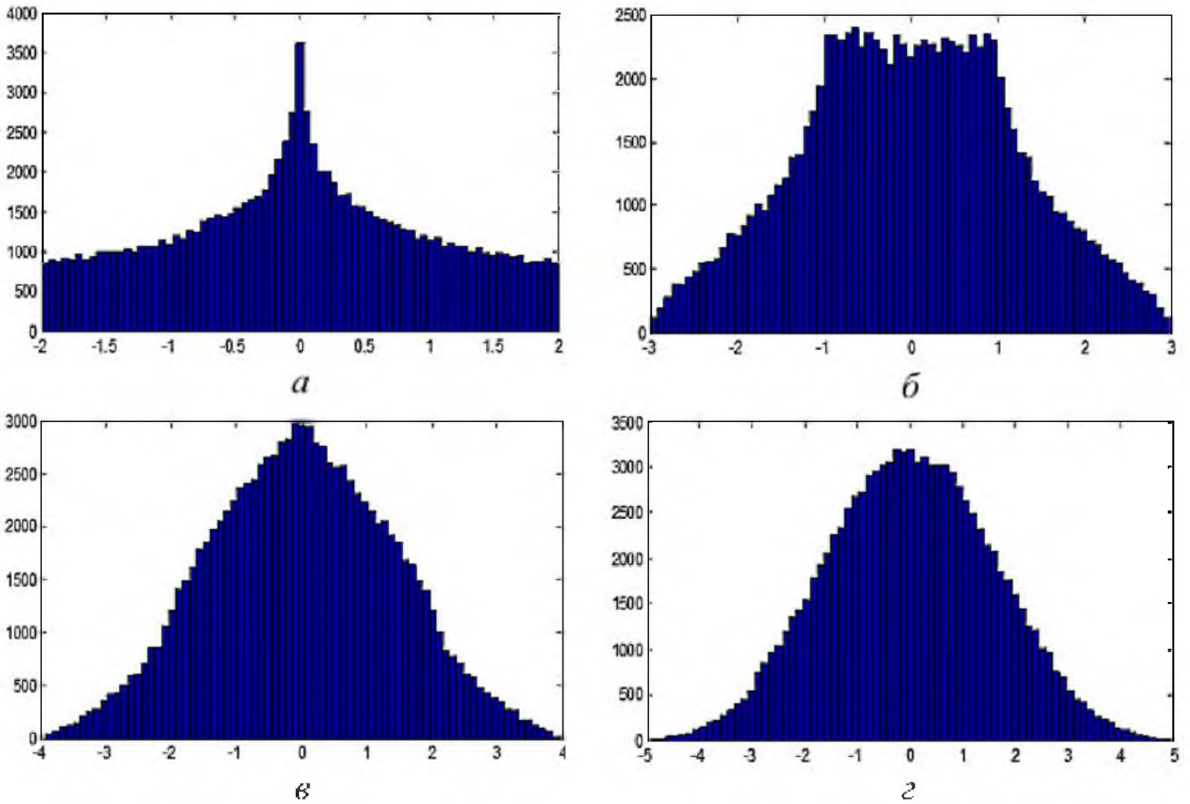


Рис. 2. Гистограммы экспериментальных данных
Fig. 2. Histograms of the experimental data

Для удобства анализа, на рис. 3 результаты представлены в виде нормированных графиков функции статистики (огибающих гистограммы).

По полученным графикам можно наблюдать выполнение закона больших чисел, когда совместное действие большого числа одинаковых и независимых случайных факторов приводит к результату, в пределе не зависящему от случая. Полученное распределение с увеличением n стремится к нормальному (гауссовому) закону распределения, что является иллюстрацией центральной предельной теоремы для одинаково распределенных слагаемых [1]. В данном случае при $n=5$ совместное распределение случайных величин уже можно считать близким к нормальному.

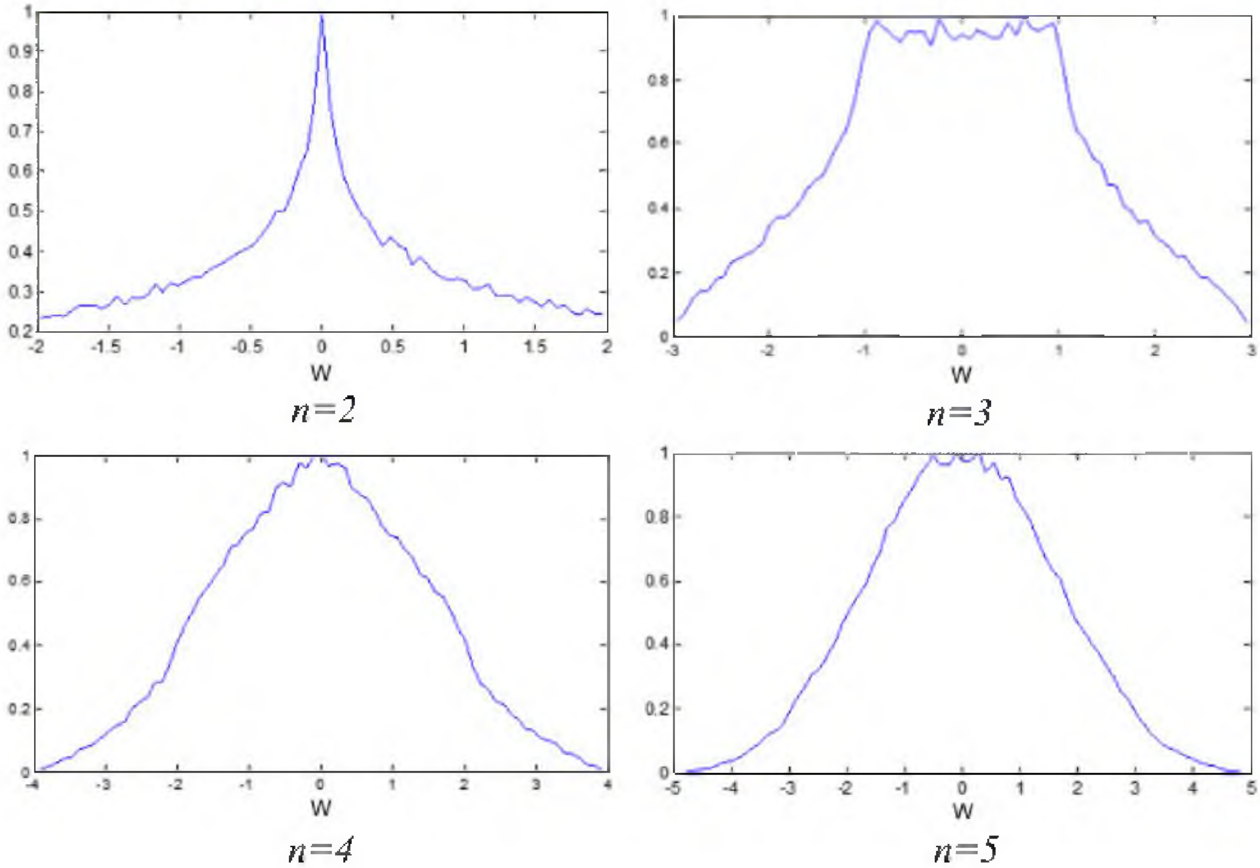


Рис. 3. Нормированные графики огибающих гистограмм
Fig. 3. Normalized graphs of envelope histograms

Статистические данные, полученные в ходе моделирования и проиллюстрированные в виде графиков на рис. 3, представляют собой определенные математические зависимости, которые удобнее описать в форме аналитически заданных функций. Для этого необходимо произвести интерполяцию и определить уравнение регрессии экспериментальных данных [3].

Для данного исследования оптимальной будет являться интерполяция, приближенная в узлах, позволяющая сгладить неточности и отклонения экспериментальных данных, обусловленные ограничениями, неизбежными при компьютерном моделировании поведения случайных величин [5]. Так, огибающие гистограммы, описывающие законы распределения исследуемых случайных величин, не являются гладкими; ограничение количества опытов конечным числом также не позволяет получить идеальные функции.

Обработка статистических данных моделирования осуществлялась с помощью функции MATLAB polyfit(), которая выполняет аппроксимацию полиномами. В качестве примера на рис. 4 изображен график интерполирующей функции, представляющей собой полином шестой степени. Задача интерполяции в данном случае сводится к поиску коэффициентов полинома с помощью встроенной функции polyfit().

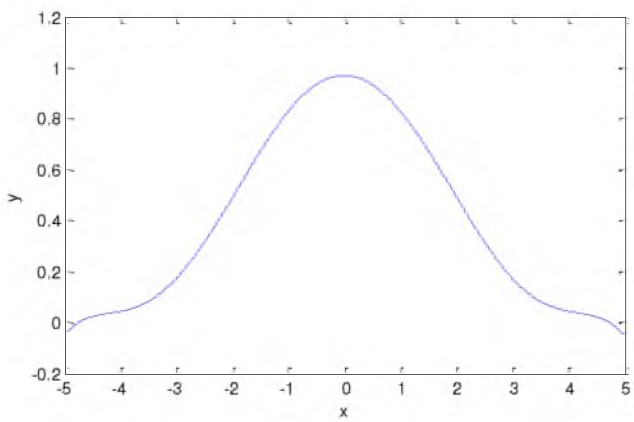


Рис. 4. Функция интерполяции
Fig. 4. Interpolation function

Данная интерполяция проводилась для функции плотности вероятности при *n=5*. Ниже приведено выражение функции интерполяции на рис. 4 в виде формулы (2).

$$f(x) = -0{,}0002\cdot x^6 + 0{,}00002\cdot x^5 + 0{,}0085\cdot x^4 - \\ -0{,}0002\cdot x^3 - 0{,}155\cdot x^2 - 0{,}0004\cdot x + 0{,}998 \quad (2)$$

Для оценки точности интерполяции можно произвести расчет среднеквадратическая погрешности по формуле (3).

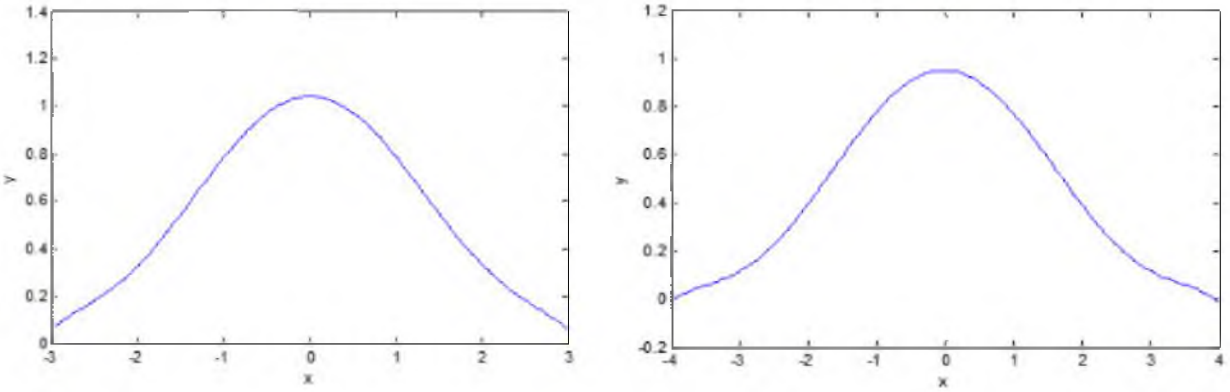
$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{N}(\tilde{s}(t) - s(t))^2}{\sum_{t=1}^{N} s^2(t)}}, \quad (3)$$

где $s(t)$ — исходная функция;

$\tilde{s}(t)$ — значения аппроксимированной функции, взятые от аргументов исходной.

Для *n=5* среднеквадратическая погрешность интерполяции равна 0,024.

На рис. 5 приведены аналогичные аппроксимации для *n=3,4*.



n=3 *n=4*

Рис. 5. Интерполяция экспериментальных данных
Fig. 5. Interpolation of the experimental data

В (4) и (5) приведены выражения соответствующих функций интерполяции.

$$f(x) = -0{,}0013\cdot x^6 - 0{,}00005\cdot x^5 + 0{,}03\cdot x^4 + 0{,}0032\cdot x^3 - \\ -0{,}28\cdot x^2 - 0{,}009\cdot x + 1{,}037 \quad (4)$$

$$f(x) = -0{,}0037\cdot x^6 - 0{,}00002\cdot x^5 + 0{,}014\cdot x^4 + 0{,}0003\cdot x^3 - \\ -0{,}19\cdot x^2 - 0{,}001\cdot x + 0{,}9314 \quad (5)$$

При *n=3* среднеквадратическая погрешность интерполяции составила 0,0821; при *n=4* – 0,0324.

Для *n=2* подобрать простую аппроксимирующую функцию не удалось. Однако вычисление двумерной плотности вероятности не требует поиска аппроксимирующего выражения, так как для него существует точное выражение, определяемое формулой (1).

Заключение

В результате проведения исследования были получены аппроксимирующие формулы для *n*-мерной плотности вероятности косинуса разности фаз для *n≤5*. Показано, что для значений *n>5* плотность вероятностей может быть аппроксимирована нормальным законом распределения. Результаты исследований могут быть использованы при проведении статистических расчётов для оценки эффективности методов приема и обработки сигналов со случайными параметрами.

Список литературы

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учеб. для вузов. 6-е изд. стер. М.: Высшая школа, 1999. 576 с.
2. Гуткин Л.С. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1961. 491 с.
3. Купер Дж., Макгиллем К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем: Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 376 с.
4. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Советское радио, 1974. 552 с.
5. Половко А.М., Бутусов П.Н. MATLAB для студента. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 320 с.
6. Потемкин В. Г. Вычисления в среде MATLAB. М.: Диалог-МИФИ, 2004. 720 с.

7. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
8. Интерполяция функций интерполяционными полиномами // MATLAB.Exponenta / Материалы по продуктам MATLAB & Toolboxes. URL: http://matlab.exponenta.ru/spline/book1/10.php (дата обращения: 27.04.2016).

References

1. Ventcel' E.S. Probability Theory: High School Textbook, 6th edition. Moscow: Vysshaya Shkola, 1999. P.576.
2. Gutkin L.S. The Theory of Optimal Methods of Radio Reception in Fluctuating Noise. Moscow: Gosehnergoizdat, 1961. P.491.
3. Cooper G., McGillem C. Probabilistic Methods of Signal and System Analysis. Moscow: Mir, 1989. P.376.
4. Levin B.R. Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering. Book One. 2nd edition. Moscow: Sovetskoe Radio, 1974. P.552.
5. Polovko A.M., Butusov P.N. MATLAB for Students. St. Petersburg: BHV-Petersburg, 2005. P.320.
6. Potemkin V. G. Calculations in MATLAB. Moscow: Dialog-MIFI, 2004. P.720.
7. Tikhonov V.I. Statistical Radios. 2nd edition. Moscow: Radio i Svyaz', 1982. P.624.
8. Interpolation of Functions by Interpolating Polynomials // MATLAB.Exponenta / Information on products MATLAB & Toolboxes. URL: http://matlab.exponenta.ru/spline/book1/10.php. (date of access: April 27, 2016).